

---

# Formes et courants en géométrie d'Arakelov non archimédienne

*Projet de thèse*

## Antoine Chambert-Loir

Université de Paris, Sorbonne Université, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, IMJ-PRG, F-75013, Paris, France  
Courriel: [antoine.chambert-loir@u-paris.fr](mailto:antoine.chambert-loir@u-paris.fr)

## Olivier Wittenberg

Université Sorbonne Paris Nord, Institut Galilée, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France  
Courriel: [olivier.wittenberg@math.univ-paris13.fr](mailto:olivier.wittenberg@math.univ-paris13.fr)

---

### 1. Géométrie d'Arakelov

Le contexte général de cette thèse est la géométrie diophantienne, un sujet où l'on cherche à comprendre la nature arithmétique des équations polynomiales à coefficients, disons entiers. Pour étudier les solutions, la notion de hauteur, introduite par WEIL (1928) et NORTHCOTT (1950) s'est avérée fructueuse.

Initiée par ARAKELOV (1974) et reprise par FALTINGS (1984), pour les surfaces arithmétiques, étendue en dimension supérieure par GILLET & SOULÉ (1990a,b), la *géométrie d'Arakelov* fournit un moyen systématique de création de hauteurs et permet de les étudier avec précision. Trois idées la sous-tendent :

- L'ancienne analogie (Kronecker...) entre arithmétique et géométrie, visant à étudier un objet arithmétique comme la « famille de ses réductions modulo  $p$  » comme s'il s'agissait d'une famille géométrique paramétrée par une courbe;
- Le parallèle avec la théorie de l'intersection en géométrie algébrique, découvert dans les années 1950–1970;
- L'idée (due à PARSHIN et ARAKELOV) qu'il faille ajouter à ces « réductions modulo  $p$  » un objet *analytique*. Chez Arakelov, il s'agissait de fonctions de Green (au sens de la théorie du potentiel) sur une surface de Riemann compacte (qui résolvent une équation de type  $\Delta g = -\delta_p + \mu$ , où  $p$  est point et  $\mu$  une mesure de probabilité); en dimension supérieure, il s'agit de *courants* (au sens de De Rham) résolvant « l'équation de Green »  $dd^c g + \delta_Z = \omega_Z$ , où  $\delta_Z$  est le courant d'intégration sur un cycle  $Z$  et  $\omega_Z$  une forme lisse.

La façon souple dont elle permet d'interpréter les hauteurs, à la suite de FALTINGS (1991); BOST ET AL. (1994); FALTINGS (1992); ZHANG (1995a) en fait aujourd'hui un outil important en géométrie diophantienne. Mentionnons par exemple la preuve de la conjecture de Bogomolov déduite du théorème d'équidistribution de SZPIRO ET AL. (1997).

## 2. Géométrie d'Arakelov non archimédienne

Ainsi présentée, on voit que la géométrie d'Arakelov mêle des considérations algébriques (la théorie de l'intersection sur les schémas) et analytiques complexes (la théorie de Hodge), de façon visiblement dissymétrique.

Les versions *non archimédiennes* de la géométrie d'Arakelov visent à diminuer cette dissymétrie en étudiant la situation algébrique dans un langage proche de celui de l'analyse. Il y en a plusieurs dans le cas des courbes, qui culminent avec la théorie d'A. THUILLIER (2006) basée sur la théorie des espaces analytiques de BERKOVICH (1989) qui offre un parallèle exceptionnel avec la théorie complexe. En dimension plus grande, aucune des approches existantes n'est vraiment complète, et ce projet de thèse ambitionne de diminuer cet écart.

L'approche qui semble actuellement la plus complète est celle de S. BLOCH, H. GILLET & C. SOULÉ (1993) mais celle-ci, malgré le langage qu'elle introduit, est entièrement algébrique : ces auteurs nomment « formes », « courants », « fibrés vectoriels métrisés », etc., le résultat de diverses constructions subtiles en théorie de l'intersection sur les schémas et démontrent les théorèmes qui justifient ces dénominations. Outre l'absence de motivation analytique, leur approche requiert une conjecture de résolution des singularités actuellement hors de portée.

Un article influent de ZHANG (1995*b*) propose des objets limites, de fait assez proches des  $b$ -diviseurs de la géométrie birationnelle, et étend une partie de la théorie à ces objets, en particulier leurs nombres d'intersection. Sur cette base, j'avais pu dans (CHAMBERT-LOIR, 2006) construire des *mesures* sur des espaces analytiques de Berkovich qui jouent le rôle des mesures qui apparaissent dans le théorème d'équidistribution de SZPIRO *ET AL.* (1997). Le théorème d'équidistribution général a été prouvé peu après par YUAN (2008).

Dans une prépublication (2012) avec A. DUCROS, nous avons proposé des notions de « formes différentielles » et de « courants » sur les espaces analytiques de Berkovich et démontré un premier jeu de théorèmes qui justifient cette dénomination. Notre construction est géométrique, fondée sur un mélange de géométrie non archimédienne et de géométrie tropicale (réelle) et ne fait usage d'aucune conjecture de résolution des singularités. Depuis 2012, nous avons repris de fond en comble cette prépublication ; elle consiste désormais en un livre de près de 500 pages en bonne voie d'achèvement. La version étendue offre beaucoup plus de souplesse, et contient aussi de nombreux résultats nouveaux que nous avons annoncé vouloir démontrer.

Comme l'ont montré W. GUBLER et K. KÜNNEMANN (2017), elle permet de retrouver une partie de la géométrie d'Arakelov non archimédienne. Plus récemment, A. MIHATSCH (2022) a montré comment elle permettait d'interpréter des nombres associés à des variétés de Shimura, remplissant de fait notre espoir que la géométrie non archimédienne puisse pallier aux défauts de la géométrie algébrique. YIFENG LIU (2020) a également proposé une construction des classes de cycles dans la théorie cohomologique permise par ces formes.

### 3. La thèse

L'objet principal de cette thèse sera de comprendre l'interaction entre nos formes et courants d'une part, et la théorie non archimédienne de BLOCH *ET AL.* (1995) d'autre part.

En effet, cette dernière théorie fournit un dictionnaire assez complet que la théorie des formes et courants n'atteint pas encore. Deux questions, en particulier, méritent d'être étudiées : d'une part une éventuelle théorie de classes de Chern, d'autre part l'existence des courants de Green pour les cycles de codimension au moins 2.

Pour les classes de Chern, la difficulté est que dans le contexte non archimédien, les fibrés vectoriels n'admettent pas de métriques lisses. Par nécessité, ces métriques ressemblent à une métrique  $\ell^\infty$  et leurs boules unités sont anguleuses. Il faudra donc développer soit une théorie finslérienne, soit une théorie où les classes de Chern sont naturellement des courants aux singularités suffisamment raisonnables pour être justiciables d'une théorie de produits (par exemple à la BEDFORD & TAYLOR (1976)).

Pour les courants de Green, l'obstacle majeur est que dans le cas complexe, ces courants sont obtenus via la théorie de Hodge, théorie qui n'a pour l'instant aucun analogue dans le cadre des espaces de Berkovich. Dans la théorie de BLOCH *ET AL.* (1995), ces courants de Green sont fournis « gratuitement » par des modèles entiers (raisonnables). La difficulté, là encore, viendra que ces courants auront probablement des singularités nouvelles liées à l'aspect  $\ell^\infty$  de la géométrie non archimédienne.

Il ne fait nul doute qu'une étude approfondie des relations entre ces deux théories non archimédiennes permettra d'obtenir des progrès substantiels sur ces deux questions.

### Références

- S. JU. ARAKELOV (1974), « An intersection theory for divisors on an arithmetic surface ». *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **38**, p. 1179–1192.
- E. BEDFORD & B. A. TAYLOR (1976), « The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation ». *Inventiones Mathematicae*, **37**, p. 1–44.
- S. BLOCH, H. GILLET & C. SOULÉ (1995), « Non-archimedean Arakelov theory ». *Journal of Algebraic Geometry*, **4**, p. 427–485.
- J.-B. BOST, H. GILLET & C. SOULÉ (1994), « Heights of projective varieties and positive Green forms ». *Journal of the American Mathematical Society*, **7** (4), p. 903–1027. 2152736.
- A. CHAMBERT-LOIR (2006), « Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich ». *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, **2006** (595).
- G. FALTINGS (1984), « Calculus on arithmetic surfaces ». *The Annals of Mathematics*, **119** (2), p. 387–424. 2007043.
- G. FALTINGS (1991), « Diophantine Approximation on Abelian Varieties ». *The Annals of Mathematics*, **133** (3), p. 549. 2944319.
- G. FALTINGS (1992), *Lectures on the Arithmetic Riemann-Roch Theorem*, Annals of Mathematics Studies **127**, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- H. GILLET & C. SOULÉ (1990a), « Arithmetic intersection theory ». *Publications mathématiques de l'IHÉS*, **72** (1), p. 94–174.

- H. GILLET & C. SOULÉ (1990b), « Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric I, II ». *annma2*, **131**, p. 163–203.
- D. G. NORTHCOTT (1950), « Periodic Points on an Algebraic Variety ». *The Annals of Mathematics*, **51** (1), p. 167. 1969504.
- L. SZPIRO, E. ULLMO & S.-W. ZHANG (1997), « Équidistribution des petits points ». *inven*, **127**, p. 337–348.
- A. WEIL (1928), « L'arithmétique sur les courbes algébriques ». *Acta Mathematica*, **52**, p. 281–315.
- YIFENG LIU (2020), « Tropical cycle classes for non-archimedean spaces and weight decomposition of De Rham cohomology sheaves ». *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, **53** (2), p. 291–352.
- X. YUAN (2008), « Big line bundles on arithmetic varieties ». *Inventiones Mathematicae*, **173**, p. 603–649.
- S.-W. ZHANG (1995a), « Positive line bundles on arithmetic varieties ». *jamem*, **8**, p. 187–221.
- S.-W. ZHANG (1995b), « Small points and adelic metrics ». *Journal of Algebraic Geometry*, **4**, p. 281–300.